

BIFURCATION ET ÉLASTICITÉ RETARDÉE

Omar BAZ

Laboratoire IRF-SIC, Université Ibn Zohr Agadir, Maroc

* Correspondance, e-mail : *o.baz@uiz.ac.ma*

RÉSUMÉ

Le phénomène de flambement des structures viscoélastiques, en supposant que le système étudié n'abandonne pas sa position initiale jusqu'à un instant T fini, a fait l'objet de plusieurs recherches. A chaque problème viscoélastique linéaire à mémoire longue, de type solide, on associe un problème d'élasticité instantanée et un problème d'élasticité retardée. Dans ce travail on a montré l'existence de branches bifurquées même si le chargement n'atteint pas la charge critique instantanée en supposant que le système peut être or de son état naturel en moins l'infini.

Mots-clés : *bifurcation, viscoélastique, élasticité retardée, charge critique, flambage.*

ABSTRACT

Bifurcation and delayed elasticity

The buckling phenomenon viscoelastic structures, assuming that the system under study does not abandon its original position until a time finished T , was the subject of several studies. Each linear viscoelastic problem long memory, solid type, we associate a problem of instantaneous elasticity and retarded elastic problem. In this work we showed the existence of bifurcated branches even if the load does not achieve instant critical load assuming that the system can be gold to its natural state within infinity.

Keywords : *bifurcation, viscoelastic, elasticity delayed, critical load, buckling.*

Omar BAZ

I - INTRODUCTION

Les matériaux envisagés dans ce document ont un comportement viscoélastique linéaire à mémoire longue de type solide [1, 2] : à chaque instant les contraintes sont des fonctions de toute l'histoire des déformations. A chaque problème viscoélastique linéaire à mémoire longue, de type solide, on associe deux problèmes d'élasticité linéaire : un problème d'élasticité instantanée [3] et un autre d'élasticité retardée. Dans un grand nombre de cas intéressants pour les applications, la transformation de Laplace ramène le problème viscoélastique à un problème de même forme que celui d'élasticité. Après résolution de celui-ci, la transformation inverse permet le passage à la solution du problème viscoélastique. Ce procédé n'est pas valable si la forme des conditions aux limites change avec le temps, ou si les équations d'équilibre ne sont pas linéaires. C'est le cas dans les problèmes de contact ou dans le phénomène de bifurcation. C'est l'étude de ce dernier phénomène qui est envisagé dans ce travail. Le problème de flambement d'une tige, ayant un comportement viscoélastique linéaire à mémoire longue, de type solide a été étudié par [4], puis par [5]. Ils ont montré, notamment, en supposant que la tige était dans son état naturel jusqu'à un instant T , que les charges critiques sont celles du problème d'élasticité instantanée et que même si le chargement reste constant ou décroît légèrement après avoir atteint la charge critique instantanée, il y a encore bifurcation. Ces résultats font l'objet du théorème 2. On se propose d'étudier le rôle d'élasticité retardée. On a ainsi deux possibilités, soit prendre l'instant de flambement comme origine du temps et étudier le comportement du système en plus l'infini, soit de supposer que le système peut abandonner sa position initiale depuis moins l'infini, et s'intéresser au problème de bifurcation selon le type du chargement et sa valeur par rapport aux charges critiques retardées. C'est la deuxième hypothèse qui est envisagée dans ce travail.

II - MÉTHODOLOGIE : MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

Pour simplifier les notations qui sont compliquées dès qu'on abord le phénomène de flambement, on se limite au système viscoélastique de liberté un.

II-1. Description du modèle : Système viscoélastique de liberté un

On considère le système mécaniquement constitué de deux barres rigides, identiques AC et CB de même longueur l . Les deux barres reliées au point C par une "articulation de type viscoélastique" (un couple de rappel de type viscoélastique).

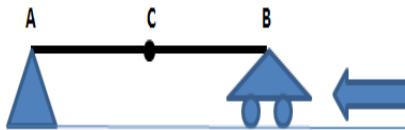


Figure 1 : Système de liberté un

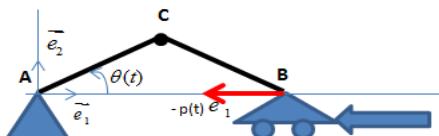
Dans la configuration naturelle du système, l'articulation C n'exerce aucun couple sur les deux barres. On suppose que :

- H1) Initialement A, C et B sont sur le même axe (A, \vec{e}_1) avec ($A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) est un repère orthonormé;
- H2) L'extrémité B est guidée sans frottement sur l'axe (A, \vec{e}_1) (appui sur rouleaux);
- H3) L'extrémité A est fixée (appui fixe);
- H4) Les efforts extérieurs qui s'exercent sur le système sont réduites à une charge axiale dépendante du temps $-p(t)\vec{e}_1$ appliquée à l'extrémité B.

On suppose connu l'évolution du chargement $p(t)$, on se propose d'étudier les déformations du système dans une évolution quasi-statique.

II-2. Equation d'équilibre

En vérité, l'équation du problème est obtenue en écrivant l'équilibre des forces sur la configuration déformée. Pour tout t élément de \mathbb{R} , on définit :



- $\theta(t)$: l'angle (\vec{e}_1, \vec{AC}), qui caractérise les déformations du système, en supposant que celles-ci ont lieux dans le plan (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2);
- $M(t)$: la composante sur \vec{e}_3 du couple de rappel.

Sous les hypothèses H1) à H4) le théorème des moments appliqué au système dans une évolution quasi-statique conduit à **l'Equation** suivante :

$$M(t) = 1 p(t) \sin \theta(t) \quad (1)$$

II-3. Loi de comportement [2] [6] [7] [8]

On considère une loi de comportement viscoélastique linéaire à mémoire longue de type solide et on pose :

$$M(t) = l\lambda\theta(t) - l\lambda\beta \int_{-\infty}^t g(t-s)\theta(s)ds \quad (2)$$

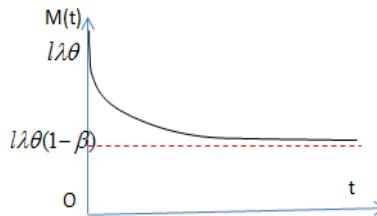
ou g est une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , positive, continue, décroissante, ayant zéro pour limite en $+\infty$ (mémoire évanescante).

Le fait que le comportement est de type solide se traduit par :

$$\int_0^{+\infty} g(s)ds = 1 \text{ et } 0 \leq \beta < 1.$$

Si $\beta = 0$, $M(t) = l\lambda\theta(t)$ correspond à un comportement élastique, avec, λ est la première charge critique d'élasticité instantanée [3], on parle ainsi d'élasticité instantanée. Imaginons qu'on impose une déformation

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \theta & \text{constante , si } t \geq 0 \end{cases}$$



alors, pour $t \geq 0$, on a :

$$M(t) = l\lambda \left(1 - \beta \int_0^t g(s)ds \right) \theta$$

Il est clair que $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = M_\infty = l\lambda(1 - \beta)\theta$. Cette **Equation** décrit un comportement dit d'élasticité retardée. Le coefficient d'élasticité retardée est ainsi donné par :

$$\lambda_T = \lambda(1 - \beta) \quad (3)$$

II-4. Equation du problème

Supposons connue l'évolution du chargement $p(\cdot)$, et compte tenu des relations (1) et (2) on obtient **l'Equation** de bifurcation suivante

$$\lambda\theta(t) - \lambda\beta \int_{-\infty}^t g(t-s)\theta(s)ds = p(t) \sin \theta(t) \quad (4)$$

où λ est le coefficient d'élasticité instantanée, g est la fonction de mémoire et $0 \leq \beta < 1$.

III - RÉSULTATS ET DISCUSSION

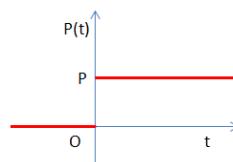
III-1. Le problème de M E GURTIN [4]

Remarquons que $\Theta = 0$, est la solution triviale de *l'Equation (4)*. Si on linéarise (4) autour de $\Theta = 0$, on a alors,

$$\lambda\theta(t) - \lambda\beta \int_{-\infty}^t g(t-s)\theta(s)ds = p(t)\theta(t) \quad (4')$$

On suppose que le système est dans son état naturel jusqu'à un instant T que l'on prend comme origine du temps : $\forall t < 0, \theta(t) = 0$ et on applique brusquement, à l'origine, un chargement constant :

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



l'Equation (4') devient :

$$\lambda\theta(t) - \lambda\beta \int_0^t g(t-s)\theta(s)ds = P\theta(t) \quad (4'')$$

[4] a montré que *l'Equation (4'')* n'a pas d'autre solution continue que la solution triviale indépendamment de la valeur donnée du chargement P . On suppose que le système a pu abandonner sa position naturelle de puis moins l'infini et on se propose d'étudier l'existence de solutions du problème linéarisé, autres que la solution triviale, en appliquant un chargement supérieur à la charge critique retardée $\lambda_r = \lambda(1 - \beta)$ tout en restant inférieur à celle d'élasticité instantanée λ , on a alors le résultat énoncé par le théorème suivant :

Théorème 1

S'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que: $\forall t \in]-\infty, t_0] p(t) = \lambda_r + \varepsilon$, alors, le problème linéarisé (4'') admet une famille de solutions non identiquement nulles de la forme:

$$\theta(t) = He^{\frac{g(0)\lambda\beta\varepsilon}{\lambda\beta - \varepsilon}t}, \quad H \in \mathbb{R}^*$$

Donc, au moins pour ce type de chargement le problème linéarisé admet une famille de solutions non identiquement nulles et ayant zéro comme limite en moins l'infini.

Preuve du Théorème 1

Sous l'hypothèse du théorème 1, *l'Equation (4')* s'écrit :

$$\lambda\theta(t) - \lambda\beta \int_{-\infty}^t g(t-s)\theta(s) ds = (\lambda_r + \varepsilon)\theta(t), \quad \forall t \in]-\infty, t_0]$$

ou encore compte tenu de *l'Equation (3)* :

$$(\lambda\beta - \varepsilon)\theta(t) - \lambda\beta \int_{-\infty}^t g(t-s)\theta(s) ds = 0, \quad \forall t \in]-\infty, t_0] \quad (5)$$

Par dérivation de *l'Equation (5)* on a :

$$(\lambda\beta - \varepsilon)\theta'(t) = \lambda\beta g(0)\theta(t), \quad \forall t \in]-\infty, t_0]$$

Cette dernière *Equation* différentielle a pour solution :

$$\theta(t) = He^{\frac{\lambda\beta g(0)t}{\lambda\beta - \varepsilon}}, H \in \mathbb{R}^*.$$

et comme $\forall t \in]-\infty, t_0]$ $p(t) = \lambda_r + \varepsilon = \lambda - \lambda\beta + \varepsilon < \lambda$, il est clair que:

$$\frac{\lambda\beta g(0)}{\lambda\beta - \varepsilon} > 0 \quad \text{et par suite} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} He^{\frac{\lambda\beta g(0)t}{\lambda\beta - \varepsilon}} = 0 \quad \text{d'où la conclusion.}$$

III-2. Le problème F MIGNOT & J P PUEL [5]

On pose $g(t) = e^{-t/T}$ avec T est le temps de relaxation qu'on ramène à l'unité par un changement d'échelle. En supposant que $\theta(t) = 0$ et $p(t) = 0$ pour les t négatifs (le système est dans son état naturel sans aucun chargement pour les t négatifs) dans *l'Equation (4)*, celle-ci devient :

$$\lambda\theta(t) - \lambda\beta e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) ds = p(t) \sin \theta(t) \quad (6)$$

L'Equation (6) est de même type que celle qui a gouverné les travaux de [5] dans le cas d'une tige viscoélastique dont on rappelle les principaux résultats par le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soient $p(\cdot)$ un chargement continu, et $T > 0$. On suppose que :

- (M1) $\forall t < 0$, $p(t) = 0$ et $\theta(t) = 0$;
- (M2) $\forall t \in [0, T[$, $p(t) < \lambda$ (λ étant la charge critique instantanée) ;

- (M3) $p(T) = \lambda$ pour la première fois,
- (M4) Pour tout t dans un voisinage de T , on pose :

$$p(t) = \lambda + (t - T)p_1 + (t - T)^2 Q(t - T).$$

Sous les hypothèses (M1) et (M2) $\theta \equiv 0$ est l'unique solution de l'**Equation (6)** continue sur $[0, T]$. Sous les hypothèses (M1) à (M4) on a les résultats suivants selon les valeurs de p_1 . Si $0 \leq p_1$, alors, l'**Equation (6)** admet une branche bifurquée définie au voisinage de $t = T$ par :

$$\theta(t) = C(t - T)^{1/2} e^{-t} \left(1 + o(t - T)^{1/2}\right), \text{ avec } C = \left(\frac{2\lambda + 3P_1}{3\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, \mu = \frac{\lambda}{6}$$

Si $-\frac{2}{3}\lambda\beta \leq p_1 < 0$, alors, l'**Equation (6)** admet une famille infinie de branches bifurquées de la forme, pour t voisin de T

$$\theta(t) = C(t - T)^{1/2} e^{-t} \left(1 + o(t - T)^{1/2}\right), \text{ avec } C = \left(\frac{2\lambda + 3P_1}{3\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, \mu = \frac{\lambda}{6}$$

et

$$\theta_\gamma(t) = \left(\frac{t - T}{\gamma}\right)^{-\frac{P_1}{\lambda\beta}} \left(1 + o(t - T)\right) e^{-(t-T)}, \text{ avec } \gamma > 0$$

Si $p_1 < -\frac{2}{3}\lambda\beta$ alors, $\theta \equiv 0$ est la seule solution continue de l'**Equation (6)**

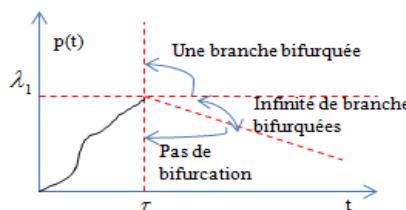


Figure 2 : Bifurcation selon les valeurs du chargement elle résume le Théorème 2

En d'autres termes : pour tout chargement continu, appliqué durant une "période finie" sans atteindre la charge critique instantanée, il n'y a pas de flambement du système. Ce résultat est connu déjà en élasticité. La nouveauté

dans ces travaux est l'existence de branches bifurquées même si le chargement devient inférieur à la charge critique instantanée après l'avoir dépassé.

III-3. Bifurcation dans un voisinage de $-\infty$ relativement à la charge critique retardée.

Notre objectif est d'étudier les possibilités du flambement du système autour de sa configuration naturelle. On reprend *l'Equation* d'équilibre donnée par la relation (4) et on suppose que la fonction de mémoire décroît exponentiellement dans le temps [7] ($g(t) = e^{-t}$ " le temps de relaxation étant l'unité"), c'est ce qu'on trouve généralement dans la pratique, on obtient :

$$\lambda\theta(t) - \lambda\beta e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s \theta(s) ds = p(t) \sin \theta(t) \quad (7)$$

Remarquons que dans *l'Equation* (7) la structure d'être hors de sa configuration naturelle depuis $t = -\infty$. Il est claire que la fonction $\Theta \equiv 0$ est une solution de (7) indépendamment des valeurs de $p(\cdot)$. Dans la suite on se limite à la recherche de solutions continues et non identiquement nulles de (7) telles que: $0 \leq \Theta(t) \leq \pi/2$.

Théorème 3

Soient $p(\cdot)$ un chargement continu, T un nombre réel, ε un réel positif et $T_1 \in \mathbb{R}$ $T < T_1$ tels que :

- (M5) $p(t) \leq \lambda_{T_1} - \varepsilon, \forall t < T$ ($\lambda_{T_1} = \lambda(1 - \beta)$, λ étant la charge critique instantanée)
- (M6) $p(t) \leq \lambda, \forall t \in [T, T_1]$;
- (M7) $p(t) = \lambda_{T_1} + \varepsilon + \alpha e^t + e^{2t} q(t) < \lambda$;
 $\forall t \in]-\infty, T]$ avec $q(\cdot)$ bornée $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$.
- Sous l'hypothèse (M5), on a alors, toute solution continue de (7) ayant zéro comme limite en $-\infty$, est identiquement nulle sur $]-\infty, T[$.
- ii) Sous les hypothèses (M5) et (M6), $\Theta \equiv 0$ est la seule solution continue de (7), ayant zéro comme limite en $-\infty$.
- iii) Sous l'hypothèse (M7), l'équation (7) admet une famille de branches bifurquées de la forme:

$$\theta(t) = K \frac{\beta\lambda}{(\beta\lambda - \varepsilon - \alpha e^t)^2} \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^{\frac{\varepsilon}{\lambda\beta - \varepsilon}}, \quad K \in \mathbb{R}^*.$$

On a donc l'absence de bifurcation pour tout chargement inférieur à la charge critique retardée, même si celui-ci est appliqué depuis moins l'infini. D'autre part si un chargement appliqué depuis moins l'infini est supérieur tout le temps à la charge critique retardée sans atteindre la charge critique instantanée, on a une famille de branches bifurquées. On retrouve le résultat du cas élastique mais avec le chargement critique retardée.

III-4. Démonstrations

Preuve du Théorème 3 i)

$p(\cdot)$ étant continu et par hypothèse T un élément de \mathbb{R} tel que :

$$p(t) \leq \lambda_T - \varepsilon, \quad \forall t \in]-\infty, T].$$

Compte tenu du fait que $|p(t) \sin \theta(t)| \leq p(t) |\theta(t)|$, de (7) on a alors :

$$\lambda e^t |\theta(t)| \leq (\lambda_T - \varepsilon) e^t |\theta(t)| + \lambda \beta \int_{-\infty}^t e^s |\theta(s)| ds$$

ou encore:

$$e^t |\theta(t)| \leq \frac{\lambda \beta}{\lambda \beta + \varepsilon} \int_{-\infty}^t |\theta(s)| e^s ds \quad (8)$$

D'autre part si $\theta(\cdot)$ est continue, ayant zéro comme limite en $-\infty$, il existe $t_0 \in]-\infty, T]$ tel que: $|\theta(t_0)| = \sup_{t \in]-\infty, t_0]} |\theta(t)|$. Si $\theta(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle on a alors, $|\theta(t_0)| \neq 0$ et compte tenu de cette information dans

l'Equation (8), on tire: $|\theta(t_0)| \leq \frac{\lambda \beta}{\lambda \beta + \varepsilon} |\theta(t_0)|$ et comme $0 \leq \varepsilon$ alors, on a:

$$1 \leq \frac{\lambda \beta}{\lambda \beta + \varepsilon} < 1 \quad \text{ce qui est impossible, donc } |\theta(t_0)| = 0.$$

Preuve du Théorème 3 ii)

Par hypothèses (M1) et (M2) il existe $T_1 \in \mathbb{R}$, tel que $P(t) < \lambda$. $\forall t \in [T; T_1]$, ce qui implique que l'équation (7) s'écrit, $\forall t \in [T; T_1]$:

$$e^t \lambda \theta(t) - \lambda \beta \int_T^t e^s \theta(s) ds - e^t p(t) \sin \theta(t) = \lambda \int_{-\infty}^T e^s \theta(s) ds$$

D'après le Théorème 3 i), la seule solution continue ayant zéro comme limite en $-\infty$ est la fonction identiquement nulle sur $]-\infty; T]$; et par suite on a :

$$e^t \lambda \theta(t) - \lambda \beta \int_T^t e^s \theta(s) ds - e^t p(t) \sin \theta(t) = 0$$

Il suffit de prendre l'instant T comme origine du temps pour retrouver l'équation du problème de F. Mignot et J.P. Puel et reprendre la démonstration du théorème 1 pour conclure. En effet : compte tenu de la continuité de $p(\cdot)$ et du fait que $p(t) < \lambda$ d'une part et du fait que: $|p(t) \sin \theta(t)| \leq p(t) |\theta(t)|$ d'autre part, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$e^t \lambda |\theta(t)| \leq \lambda \beta \int_T^t e^s |\theta(s)| ds + (\lambda - \eta) e^t |\theta(t)|, \forall t \in]T, T_1].$$

$$d'où : e^t |\theta(t)| \leq \frac{\lambda \beta}{\eta} \int_T^t e^s |\theta(s)| ds, \forall t \in]T, T_1].$$

On applique le lemme de GRONWALL à cette dernière inégalité pour conclure.

Preuve du Théorème 3 iii)

La démonstration de ce théorème est plus longue et plus technique; elle résulte des quatre propositions suivantes. Pour la suite on suppose que :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\infty, t_0], p(t) = \lambda_T + \varepsilon + \alpha e^t + e^t q(t) \quad (9)$$

avec, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $q(\cdot)$ est bornée sur $]-\infty, t_0]$

Proposition I

Sous l'hypothèse (9), $\forall t \in]-\infty, t_0]$, l'équation (7) est équivalente à :

$$(F_0 + F_1) \theta(t) = 0 \quad (10)$$

$$F_0(\theta(t)) = (\lambda \beta - \varepsilon - \alpha e^t) e^t \theta(t) - \lambda \beta \int_{-\infty}^t e^s \theta(s) ds \quad (11)$$

$$F_1(\theta(t)) = -e^{3t} q(t) \theta(t) - e^t p(t) [\sin \theta(t) - \theta(t)]. \quad (12)$$

Preuve

$\forall t \in]-\infty, t_0]$, compte tenu des relations (9) et (3), on a :

$\lambda - p(t) = \lambda \beta - \varepsilon - \alpha e^t - e^{2t} q(t)$. Ceci implique que (7) est équivalente à :

$$(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t) e^t \theta(t) - \lambda\beta \int_{-\infty}^t e^s \theta(s) ds = e^{3t} q(t) \theta(t) + e^t p(t) [\sin \theta(t) - \theta(t)].$$

La conclusion est immédiate, en posant dans cette dernière **Equation**, F_0 comme le premier membre et $-F_1$ comme le deuxième.

Proposition II

Il existe $t_1 \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall t \in]-\infty; t_1]$, l'équation $F_0(\theta(t)) = 0$, admet une famille de solutions de la forme :

$$\theta(t) = H \frac{\lambda\beta}{(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t)^2} \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^{\frac{\varepsilon}{\lambda\beta - \varepsilon}}, H \in \mathbb{R}^*.$$

Preuve

On pose $y(t) = \int_{-\infty}^t e^s \theta(s) ds$, dans **l'Equation** $F_0(\theta(t)) = 0$, $\forall t \in]-\infty, t_0]$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t) y'(t) = \lambda\beta y(t) \quad (13)$$

$$\text{avec, } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) = 0$$

et comme la fonction : $t \mapsto \lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t$, est continue et tend vers $\lambda\beta - \varepsilon$, en $-\infty$, il existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall t \in]-\infty, \tau_0]$, $\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t > 0$.

Soit $t_1 = \inf(t_0; \tau_0)$, on a par suite $\forall t \in]-\infty, t_1]$, l'équation (12) s'écrit :

$$y'(t) = \frac{\lambda\beta}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} y(t) \quad \text{avec : } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) = 0$$

$$\text{Cette dernière à pour solution: } y(t) = H \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^{\frac{\beta\lambda}{\beta\lambda - \varepsilon}}, H \in \mathbb{R}$$

Il est clair que : $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$, et par dérivation compte tenu de la définition de $y(.)$, on en tire la conclusion.

Proposition III

Soit θ_0 une solution de: $F_0(\theta(t)) = 0$; s'il existe $t_3 \in \mathbb{R}$ et $f \in C_b [-\infty, t_0]$ tels que $\theta_0 + f$, est solution de (10) et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(t)}{\theta_0(t)} = 0$ (14)

alors, f est un point fixe de l'application γ ; ou $\forall t \in]-\infty, t_3]$:

$$\gamma(f)(t) = \frac{-F_1(\theta_0 + f)(t)e^{-t}}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} - \theta_0(t)\lambda\beta \int_{-\infty}^t \frac{F_1(\theta_0 + f)(s)e^{-s}}{(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^s)^2 \theta_0(s)} ds, \quad (15)$$

Preuve

La démonstration de ce résultat est basée sur la méthode de variation des constantes. En effet : du fait que $F_0(\theta(t)) = 0$, la recherche des solutions de (10) sous la forme : $\theta_0 + f$, permet d'écrire celle-ci comme suite :

$$(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t)e^t f(t) - \beta\lambda \int_{-\infty}^t e^s f(s) ds = F_1(\theta_0 + f)(t)$$

On pose $y(t) = \int_{-\infty}^t e^s f(s) ds$ dans cette dernière équation, on obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t)y'(t) - \lambda\beta y(t) = -F_1[\theta_0(t) + y'(t)e^{-t}]$$

$$\text{avec, } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) = 0$$

Ces conditions sont immédiates d'après (14) et la définition de $y(t)$. L'Equation sans second membre est : $(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t)y'(t) - \lambda\beta y(t) = 0$

elle a pour solutions : $y(t) = K \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^\gamma$; $\gamma = \frac{\lambda\beta}{\lambda\beta - \varepsilon}$ & $K \in \mathbb{R}$.

On dérive $y(\cdot)$ et on remplace $y'(t)$ et $y(t)$ par leurs expressions dans l'équation complète, et on en tire $k'(t)$:

$$k'(t) = \frac{-F_1(\theta_0(t) + y'(t)e^{-t})}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^{-\gamma}$$

$$\text{et par intégration } k(t) = \rho - \int_{-\infty}^t \frac{F_1(\theta_0(s) + y'(s)e^{-s})}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^s} \left(\frac{e^s}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^s} \right)^{-\gamma} ds$$

$$y(t) = \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^\gamma \left(\rho - \int_{-\infty}^t \frac{F_1(\theta_0(s) + y'(s)e^{-s})}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^s} \left(\frac{e^s}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^s} \right)^{-\gamma} ds \right)$$

Donc par dérivation et compte tenu de la définition de $y(t)$ plus le fait que θ_0 est donnée ainsi :

$$\theta_0(t) = H_0 \frac{\lambda\beta}{(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t)^2} \left(\frac{e^t}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t} \right)^{\frac{\varepsilon}{\lambda\beta - \varepsilon}}$$

$$\text{alors, } f(t) = \frac{\theta_0(t)}{H_0} \left(\rho - \int_{-\infty}^t H_0 \lambda\beta \frac{F_1(\theta_0 + f)(s)e^{-s}}{(\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^s)^2 \theta_0(s)} ds \right) \quad (16)$$

$$- \frac{F_1(\theta_0 + f)(t)e^{-t}}{\lambda\beta - \varepsilon - \alpha e^t}$$

d'autre par compte tenu de la définition de F_1 , on a alors :

$$- \frac{F_1(\theta_0 + f)(t)e^{-t}}{\theta_0(t)} = e^{2t} \left(1 + \frac{f(t)}{\theta_0(t)} \right) + p(t) \left(\frac{\sin(\theta_0 + f)(t) - (\theta_0 + f)(t)}{\theta_0(t)} \right)$$

Compte tenu de l'égalité (14) on a: $\lim_{t \rightarrow t\infty} \frac{F_1(\theta_0 + f)(t)e^{-t}}{\theta_0(t)} = 0$ et par suite, le

passage à la limite dans (16) nous donne: $\lim_{t \rightarrow t\infty} \frac{f(t)}{\theta_0(t)} = \frac{\rho}{H_0}$, d'où compte tenu de la relation (3): $\rho = 0$ et par suite (16) implique (15). Remarquons que $C_b([-\infty, T])$ (ensemble des fonctions continues et bornées sur $[-\infty, T]$), muni de la norme $\|g\| = \sup_{t \in [-\infty, T]} |g(t)|$ est un espace de Banach.

Définition

Soient $T \in \mathbb{R}$ et $M > 0$ (θ_0 étant une solution de $F_0(\theta)(t) = 0$) on pose :

$$B(M, T) = \{g \in C_b[-\infty, T] : \|g\| \leq M \theta_0(t); \forall t \in [-\infty, T]\}$$

Proposition IV

On peut trouver $\tau_1 \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$ tel que :

$B(M_1, \tau_1) \supset \gamma(B(M_1, \tau_1))$, avec : Γ est donnée par (15).

Preuve

Soient $M > 0$, $T \in \mathbb{R}$ convenablement choisis pour que $\theta_0(t)$ reste voisin de zéro sur $]-\infty, T]$; et soit $f \in B(M, T)$; de la définition de F_1 (voir(12)) on tire:

$$\begin{aligned} |F_1(\theta_0 + f)(t)| &= |\theta_0(t)e^{3t} \left(1 + \frac{f(t)}{\theta_0(t)}\right) + p(t)e^t (\sin(\theta_0 + f)(t) - (\theta_0 + f)(t))| \\ &\leq e^{3t} |\theta_0(t)| (1 + M) A_1 + A_2 e^t |(\theta_0 + f)^3(t)| \\ &\leq e^{3t} |\theta_0(t)| (1 + M) A_1 + A_2 e^t |(\theta_0)^3(t)| (1 + M)^3 \end{aligned}$$

d'où en tenant compte de la relation (15) :

$$|\gamma(f)(t)| \leq e^{2t} \|\theta_0\| A_3 (1 + M) + A_4 \|\theta_0\|^3 (1 + M)^3$$

$$\text{et par suite on a: } \frac{\|\gamma(f)\|}{|\theta_0(t)|} \leq e^{2t} A_3 (1 + M) + A_4 \|\theta_0\| M (1 + M)^3$$

Le fait que la fonction: $t \mapsto e^{2t}$ et $t \mapsto \|\theta_0\|_t = \sup_{s \in]-\infty, t]} |\theta_0(s)|$ sont continues et

convergent vers zéro, quand t tend vers $-\infty$, permet de trouver (M', T') tel que: $\gamma(f) \in B(M', T')$. On pose $\tau - 1 = \inf(T, T')$ et $M_1 = \sup(M, M')$ pour conclure.

Proposition V

On peut trouver $\tau_2 \in \mathbb{R}$; $M_2 > 0$ tels que γ soit contractante sur $B(M_2, \tau_2)$.

Preuve

Soit $(M_1; \tau_1)$ un couple vérifiant la proposition V. Soient f_1 et f_2 deux éléments de $B(M_1; \tau_1)$ et $t \in]-\infty; \tau_1]$. La définition de F_1 permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |F_1(\theta + f_1)(t) - F_1(\theta + f_2)(t)| &= \\ &= |q(t)e^{3t}(f_1 + f_2)(t) + p(t)e^t [\sin(\theta_0 + f_1)(t) - \sin(\theta_0 + f_2)(t) - (f_1 - f_2)(t)]| \end{aligned}$$

On a $\theta_0(t)$ est voisin de zéro sur $]-\infty, \tau_1]$, et compte tenu de la relation (14), alors :

$$|\sin(\theta_0 + f_1)(t) - \sin(\theta_0 + f_2)(t) - (f_1 - f_2)(t)| = \\ |\alpha_0| \cdot |[(\theta_0 + f_1)^3 - (\theta_0 + f_2)^3 + S(\theta_0 + f_1) - S(\theta_0 + f_2)](t)|$$

ou S est analytique d'ordre 5, Ce qui fait que :

$$|S(\theta_0 + f_1)(t) - S(\theta_0 + f_2)| \leq \alpha_1 |(f_1 - f_2)(t)| \cdot |\theta_0(t)|^4 (1 + M_1)^4$$

puis

$$|\sin(\theta_0 + f_1)(t) - \sin(\theta_0 + f_2)(t) - (f_1 - f_2)(t)| \leq \\ \alpha_0 |\theta_0^2(t)(f_1 - f_2)(t)| h(M_1) + \alpha_1 |\theta_0^4(t)(f_1 - f_2)(t)| (1 + M_1)^4$$

ou h est un polynôme en M_1 indépendant de t . On a donc :

$$|F_1(\theta_0 + f_1)(t) - F_1(\theta_0 + f_2)(t)| \leq \\ |(f_1 - f_2)(t)[c_2 |\theta_0|^4 (1 + M_1)^4 e^t + c_1 e^t |\theta_0|^2 h(M_1) + c_0 e^{3t}]|$$

d'où compte tenu de (15) :

$$\sup_{s \in]-\infty, t]} |\gamma(f_1)(s) - \gamma(f_2)(s)| \leq \\ (\|\theta_0\|^4 c_5 + c_4 \|\theta_0\|^2 h(M_1) e^t + c_3 e^{2t} \lambda \beta) \sup_{s \in]-\infty, t]} |(f_1 - f_2)(s)|$$

et comme les fonctions $t \mapsto e^{2t}$, $t \mapsto \|\theta_0\|_t$ et $t \mapsto \|\theta_0\|_t^4$ sont continues et convergent vers zéro en $-\infty$, alors, il existe M_1' et τ_1' tels que

$$\|\theta_0\|^4 (1 + M_1')^4 c_5 + c_4 \|\theta_0\|^2 h(M_1') + e^{2t} c_3 \lambda \beta < 1, \quad \forall t \in]-\infty, \tau_1']$$

On pose $M_2 = \sup(M_1, M_1')$ et $\tau_2 = \inf(\tau_1, \tau_1')$ et conclure.

IV - CONCLUSION

Le comportement viscoélastique d'un nombre important de matériaux peut se déclencher par une variation de température. Les matériaux viscoélastiques sont de plus en plus présent dans la composition de plusieurs autres éléments interviennent dans de nombreux domaines tels que le génie civil [8 - 10] le médical [11], l'aéronautique, (etc.) A chaque problème viscoélastique linéaire

à mémoire longue s'associé un problème élastique instantanée et un autre d'élasticité retardée. Durant ce travail on a essayé de mettre en lumière le rôle d'élasticité retardée en choisissant moins l'infini comme origine du temps et on a examiné l'existante de solutions non identiquement nulles. [4] a montré que l'**Equation** de bifurcation linéarisée n'a pas d'autre solution continue que la solution triviale indépendamment de la valeur donnée du chargement P appliqué brusquement à un instant T qu'on ramène à zéro par un changement de variable. Ce résultat est basée sur le fait que le système ne peut abandonner sa position initiale qu'à l'instant t fini. On supposant que le système a pu abandonner sa position naturel de puis moins l'infini, sous l'effet d'un chargement qui est supérieur à la charge critique instantanée $\lambda_T = \lambda(1 - \beta)$ sans atteindre la charge critique instantanée, on a monté l'existence d'une famille de solutions continues ayant zéro comme limite en moins l'infini. Pour le problème non linéaire, **Equation (4)**, sous l'hypothèse que le système reste dans sa position naturel jusqu'à un instant T fini, [3] ont montré qu'il n'y a pas de bifurcation tant que le chargement n'a pas atteint la première charge critique instantanée λ . Dans le théorème 3, on a montré, on supposons que le système peut abandonner sa position initiale qu'il n'y a pas de bifurcation tant que le chargement reste inférieur à la première charge critique retardé $\lambda_T = \lambda(1 - \beta)$, et que pour, au moins, pour un chargement de type

$$p(t) = \lambda_T + \varepsilon + \alpha e^t + e^{2t} q(t) < \lambda$$

$\forall t \in] - \infty, T]$ avec $q(.)$ bornée $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$, il y a bifurcation même si le chargement n'a pas atteint pas la première charge critique instantanée. Nous espérons que les travaux à venir s'intéresseront aux autres types de chargements, à l'existence éventuelle de bifurcation même si le chargement devient inférieur à la première charge critique retardée après l'avoir dépassé.

RÉFÉRENCES

- [1] - JEAN SALENÇON, Viscoélasticité pour le calcul des structures Editions de polytechnique Mai 2009. 91128 Palaiseau cedex.
- [2] - AURELIEN MOREAU, Identification de propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesures de champs de réponses en fréquence de structures. Autre [cond-mat.other]. INSA de Rouen, Français, 2007.
- [3] - WILL HANSEN, ZHICHAO LIU E A B KOENDERS, Viscoelastic Stress Modeling in Cementitious Materials Using Constant Viscoelastic Hydration Modulus. University of Michigan, Ann Arbor USA.

- [4] - M. E. GURTIN, V. J. MIZEL, D. W. REYNOLDS, On the buckling of linear viscoelastic Rods. Rapport MRC : 2222 (1981).
- [5] - F. MIGNOT & J. P. PUEL, Flambage d'une tige viscoélastique, Collège de France. Seminar vol (Paris 1981-1982), Zentralblatt MATH Database 1931 – 2016 (Zbl 0532.35006), 2016 European Mathematical Society, FIZ Karlsruhe & Springer-Verlag.
- [6] - M. E. GURTIN and E. STERNBERG, On the linear theory of viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal., 11 (1962)291 - 356.
- [7] - MINES, ParisTech Notes de cours: MECANIQUE DES MATERIAUX SOLIDES, D. RYCKELYNCK P.-O. BOUCHARD, S. CANTOURNET, J-L. DEQUIEDT, M. MAZIERE, H. PROUDHON. http://mms2.ensmp.fr/mms_paris/bonus/poly_mms_2015.pdf
- [8] - J. P. MERCIER, G. ZAMBELLI, W. KUR, Introduction à la science des matériaux, PPUR Presse polytechniques, 1999.
- [9] - LAURA GALUPPI, Gianni Royer-Carfagni, Buckling of three-layered composite beams with viscoelastic interaction, Composite Structures: Volume 107 (January 2014) P 512 - 521.
- [10] - RAPHAËLLE SADONE, Comportement de poteaux en béton armé renforcés par matériaux composites et soumis à des sollicitations de type sismique et analyse d'éléments de dimensionnement. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français.
- [11] - VIRGINIA VADILLO-RODRIGUEZ,^{1,2,3} SARAH R. SCHOOLING,^{1,2,3} and JOHN R. DUTCHER¹, In Situ Characterization of Differences in the Viscoelastic Response of Individual Gram-Negative and Gram-Positive Bacterial Cells, J Bacteriol. 2009 Sep; 191(17): 5518–5525. Published online 2009 Jul 6. doi: 10.1128/JB.00528-09.