

**ESTIMATION DES CONTRAINTES DE RUPTURE DANS LES
MATÉRIAUX COMPOSITES EN FONCTION DE LA
TEMPÉRATURE. APPLICATION AU COMPOSITE
EPOXYDE-CARBONE**

**Patrick Joël Agnem NWATSOCK¹, Guy Edgar NTAMACK¹,
Roger Pierre Lemanle SANGA^{1*}, C.A. MOUBEKE¹,
E.S. Kelmamo SALLABOUI¹ et Saâd Charif D'OUAZZANE²**

*¹Groupe de Mécanique des Matériaux et de l'Acoustique, GMMA,
Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Ngaoundéré,
BP. 454 Ngaoundéré, Cameroun*

*²Laboratoire de Mécanique, Thermique et Matériaux, LMTM, Ecole
Nationale de l'Industrie Minérale, ENIM, BP 753 Rabat, Maroc*

*Correspondance, e-mail : lemanlesanga@yahoo.fr

RÉSUMÉ

L'utilisation intensive des matériaux composites dans l'industrie suscite chez les ingénieurs et chercheurs une conquête continue des techniques d'élaboration plus performantes afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques de ces matériaux. L'objectif est de mettre au point des structures qui garantissent une sécurité optimale des utilisateurs. Dans ce papier, il est question de déterminer un modèle théorique de calcul de la contrainte à rupture des matériaux composites soumis à des variations de températures.

Le modèle que nous proposons tient compte de l'évolution du module d'élasticité et de l'évolution du facteur d'intensité des contraintes critique en fonction de la température. La comparaison entre les résultats donnés par ce modèle et les mesures expérimentales a donné une marge d'erreur relative inférieure à 5% sur le composite carbone-époxyde.

Mots-clés : *modélisation, matériaux composites, époxyde-carbone, température, facteur d'intensité des contraintes, contrainte à rupture.*

ABSTRACT**Estimation of Stress Fracture in Composites Materials depending on the Temperature. Application to Composite Epoxy-Carbon**

The extensive use of composite materials in the industry arouses in engineers and researchers a continuous conquest of the most effective development techniques to improve the mechanical properties of these materials. The objective is to develop structures that guarantee optimum safety of users. In this paper, it is question of a theoretical model for the calculation of the stress at fracture of composite materials subjected to changes in temperature. Model we offer takes into account the evolution of the modulus of elasticity and the evolution of the critical stress intensity factor depending on the temperature. The comparison between the results given by this model and experimental measurements gave a margin of error of less than 5% on the composite carbon-epoxy.

Keywords : *modeling, composite materials, epoxy-carbon, temperature, forced to break.*

I - INTRODUCTION

L'optimisation des matériaux composites est un enjeu primordial pour les grands groupes de l'aéronautique, notamment en termes de gain de masse et particulièrement sur la structure. Actuellement, la plupart des matériaux composites utilisés dans des applications haute performance sont à base de fibres de carbone et de matrices thermodurcissables telles que le poly-époxy [1]. Dans ces structures, la maîtrise des risques de ruine à cause de la rupture constitue des matériaux, un enjeu majeur, contenu des conditions de sécurité liées à la mise en service de ces structures. Dans ce travail, il question, de déterminer la contrainte à rupture des matériaux composites soumis à des contraintes à la fois mécaniques et thermiques. Il a été démontré que la variation de la température joue un rôle très important dans la tenue des structures car elle est liée à la rigidité de ces dernières [2]. Nous comptons établir un modèle qui nous permet de suivre l'évolution de la contrainte dans les matériaux composites en fonction de la température. La loi obtenue nous permettra de prévoir le comportement des matériaux avant la rupture afin donc de maîtriser l'évolution des contraintes dans le matériau en fonction de la température. Ensuite nous allons faire une application sur le matériau composite époxyde+carbon pour lequel nous avons des résultats expérimentaux.

II - MÉTHODOLOGIE: ASPECTS FONDAMENTAUX

II-1. Contrainte à la rupture

Dans ce travail nous allons nous placer en mode I de la mécanique de la rupture [3]. Le matériau est supposé homogène et isotrope. Dans ce cas, le champ des contraintes est donné par la relation suivante [3] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1)$$

où :

K_i est le facteur d'intensité de contraintes ; r est une coordonnée polaire ;
 $f_{ij}(\theta)$ est la fonction de distribution des angles

Et le champ des déformations est donné par la relation suivante [3] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta) \quad (2)$$

où

K_i est le facteur d'intensité de contraintes ; r est une coordonnée polaire ;
 $g_{ij}(\theta)$ est la fonction de distribution des angles

Le facteur d'intensité de contrainte (FIC) K_I en mode I, K_I a pour expression :

$$K_I = Y \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

où: Y est une constante à déterminer expérimentalement ; σ_∞ est la contrainte appliquée à l'«infini»; a est la longueur de la fissure

A la rupture, le FIC est égal au FIC critique. Le champ des contraintes se met alors sous la forme :

$$K_I = K_{Ic} = Y \sigma_{rup} \sqrt{\pi a} \quad (4)$$

où: Y est une constante qui dépend de la géométrie et à déterminer expérimentalement ; σ_{rup} est la contrainte à la rupture ; a est la longueur de la fissure

En posant :

$$\sigma_{rup} = \sigma^{el} + \sigma^{th}$$

La relation 4 devient

$$K_{Ic} = Y(\sigma^{el} + \sigma^{th})\sqrt{\pi a} \quad (5)$$

Or la contrainte thermique [4] est donnée par la relation $\sigma^{th} = E \alpha \Delta T$

Où : E est le module d'Young ; α est le coefficient de dilatation thermique ; ΔT est la variation de température

En introduisant l'expression de la contrainte thermique dans la relation 5 on obtient alors :

$$K_{Ic} = Y(\sigma^{el} + E\alpha\Delta T)\sqrt{\pi a} \quad (6)$$

En posant :

$$\sigma^{el} = R_e$$

En tenant compte du modèle de calcul du module d'élasticité du matériau en fonction de la température proposé par Lemanle et al [1] et défini par :

$$E = E_0 \cdot \frac{R_e - E_0 \alpha \Delta T}{R_e}$$

La relation 6 donnant le facteur d'intensité des contraintes devient donc:

$$K_{Ic} = Y \left[R_e + E_0 \alpha \Delta T - \frac{E_0^2}{R_e} \alpha^2 (\Delta T)^2 \right] \sqrt{\pi a} \quad (7)$$

Nous pouvons obtenir la contrainte en fonction de la température. Il vient :

$$\sigma_{rup} = \beta \left[R_e + E_0 \varepsilon - \frac{E_0^2}{R_e} \varepsilon^2 \right] \quad (8)$$

avec

$$\beta = Y \sqrt{\frac{a}{2r}} f(\theta)$$

β est un paramètre lié aux défauts dans le matériau qui peut également être déterminé expérimentalement. Pour avoir la contrainte en fonction de la déformation, on pose pour la déformation: $\varepsilon = \alpha \Delta T$. La relation 8, devient :

$$\sigma_{rup} = \beta \left[R_e + E_0 \varepsilon - \frac{E_0^2}{R_e} \varepsilon^2 \right] \quad (9)$$

Cette relation permet de calculer théoriquement la contrainte de rupture en fonction des déformations et de la température. Elle est le fondement des simulations que nous allons réaliser par la suite.

II-2. Prise en compte des matériaux composites

On considère un matériau composite dont la matrice a les caractéristiques élastiques C^M et les renforts les caractéristiques C^I , avec les C^M différents de C^I . Notons V le volume total du milieu élastique, V_M le volume total de la matrice et V_I le volume total des renforts. Soit: $V = V_M + V_I$.

Si on applique au milieu une déformation d'ensemble E_{ij} à l'infini elle sera égale à la moyenne volumique des déformations locales au sein du composite:

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{r}) dv \quad (10)$$

Où : $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ est la déformation microscopique au point \vec{r} du composite.

De même, la contrainte d'ensemble Σ_{ij} résultant de l'action de E_{ij} est aussi la moyenne volumique des contraintes locales $\sigma_{ij}(\vec{r})$ au sein du composite :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) dv \quad (11)$$

Les coefficients homogénéisés sont ceux qui relient les moyennes Σ_{ij} et E_{ij} . On a :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^e E_{kl} \quad (12)$$

Il est donc question d'expliciter cette expression. Puisque le volume total est la somme de V_I et V_M , les intégrales sur V peuvent être décomposées en la somme des intégrales sur V_I et V_M . On définit ε_{ij}^M et σ_{ij}^M comme étant respectivement la déformation et la contrainte moyenne dans la matrice. Puis ε_{ij}^I et σ_{ij}^I comme étant respectivement la déformation et la contrainte moyenne dans les renforts. Les *équations 1 et 2* deviennent donc:

$$E_{ij} = \frac{V_I}{V} \cdot \varepsilon_{ij}^I + \frac{V_M}{V} \cdot \varepsilon_{ij}^M \quad (13)$$

Et :

$$\Sigma_{ij} = \frac{V_I}{V} \cdot \sigma_{ij}^I + \frac{V_M}{V} \cdot \sigma_{ij}^M \quad (14)$$

Si on définit le rapport $f = \frac{V_I}{V}$ comme étant la fraction volumique des renforts dans la matrice les *expressions* précédentes deviennent :

$$E_{ij} = f \cdot \varepsilon_{ij}^I + (1 - f) \cdot \varepsilon_{ij}^M \quad (15)$$

Et :

$$\Sigma_{ij} = f \cdot \sigma_{ij}^I + (1 - f) \cdot \sigma_{ij}^M \quad (16)$$

On suppose qu'il existe un tenseur d'ordre 4 A^I appelé tenseur de localisation. Il relie la déformation moyenne dans les renforts à la déformation macroscopique E_{ij} . Il dépend de la microstructure et de l'hétérogénéité du composite. Il est défini par la relation:

$$\varepsilon_{ij}^I = A_{ijkl}^I \cdot E_{kl} \quad (17)$$

La loi de comportement ou loi de Hooke des renforts est donnée par la relation:

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I \cdot \varepsilon_{kl}^I \quad (18)$$

En tenant compte de (17), on a :

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I \cdot A_{klmn}^I \cdot E_{mn} \quad (19)$$

La loi de comportement appliquée à la matrice conduit à la relation suivante :

$$\sigma_{ij}^M = C_{ijkl}^M \cdot \varepsilon_{kl}^M \quad (20)$$

Or à partir de (15) on a :

$$\varepsilon_{ij}^M = \frac{1}{1-f} \cdot (E_{ij} - f \varepsilon_{ij}^I) \quad (21)$$

En introduisant la relation (17) dite de localisation dans la relation précédente on obtient :

$$\varepsilon_{ij}^M = \frac{1}{1-f} \cdot (E_{ij} - f \cdot A_{ijmn}^I \cdot E_{mn}) \quad (22)$$

On introduit donc l'expression de ε_{ij}^M dans σ_{ij}^M et on obtient :

$$\sigma_{ij}^M = \frac{1}{1-f} \cdot C_{ijkl}^M \cdot (I_{klmn} - f \cdot A_{klmn}^I) \cdot E_{mn} \quad (23)$$

Où I_{klmn} est le tenseur unité d'ordre 4.

Cette expression peut être simplifiée et écrite de la manière suivante:

$$\Sigma_{ij} = \left\{ C_{ijmn}^M + f \cdot (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) \cdot A_{klmn}^I \right\} E_{mn} \quad (24)$$

En identifiant (24) à (12) on déduit l'expression de C_{ijkl}^e et on obtient :

$$C_{ijkl}^e = C_{ijmn}^M + f \cdot (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) \cdot A_{klmn}^I \quad (25)$$

Dans l'expression (25), si on pose A_{ijkl}^I égal au tenseur unité, on obtient le modèle de Voigt [5]:

$$C_{Voigt}^e = C^M + f.(C^I - C^M) \quad (26)$$

Pour évaluer la contrainte de rupture du matériau composite, nous utiliserons ses caractéristiques équivalentes obtenues à partir de celles de ses constituants par application du modèle de Voigt précédent.

III - RÉSULTATS

III-1. Caractéristiques mécaniques des matériaux

Les caractéristiques mécaniques des matériaux que nous avons utilisés sont données dans le **Tableau** ci-dessous. Pour les valeurs du composite nous les avons obtenues en utilisant le modèle de Voigt.

Tableau 1 : Les caractéristiques des matériaux [6]

Matériaux	Module d'Young	Limite d'élasticité	Coefficient de dilatation
Carbone	$E=200$ GPa	Re=200 GPa	$\alpha=10^{-6} K^{-1}$
Epoxyde	$E=3$ GPa	Re=100 GPa	$\alpha=9.10^{-5} K^{-1}$
Composite (valeurs calculées avec le modèle de Voigt)	$E=101,5$ GPa	Re=1800 Mpa	$\alpha=4.55.10^{-5} K^{-1}$

Dans cette simulation, nous travaillons sur un stratifié carbone-époxy troué sur lequel nous effectuons un essai de traction à des températures allant de la température ambiante à 300°C ceci pour ne pas franchir la température maximale d'utilisation. Nous rappelons ici l'expression des contraintes thermiques obtenue au précédent chapitre :

$$\sigma_{rup} = \beta \left[R_e + E_o \alpha \Delta T - \frac{E_o^2}{R_e} \alpha^2 \Delta T^2 \right] \theta = 0 \Leftrightarrow f(\theta) = 1 \quad (27)$$

Dans nos simulations nous avons estimé les défauts dans le matériau de manière à ce que β soit égal à 0.1533 pour la température ambiante et 0.1246 pour une température de 120°C.

III-2. Contrainte thermique de rupture de l'époxyde

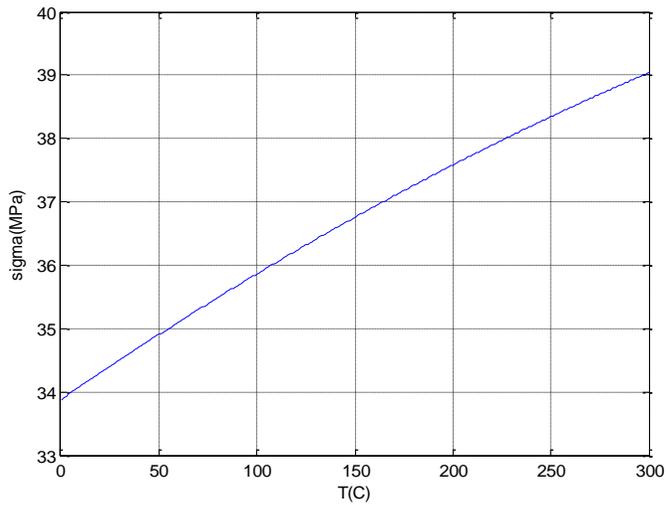


Figure 1 : *Contrainte thermique de rupture de l'époxyde*

III-3. Contrainte thermique de rupture du carbone

En utilisant les caractéristiques mécaniques du carbone nous avons la *Courbe* ci-après :

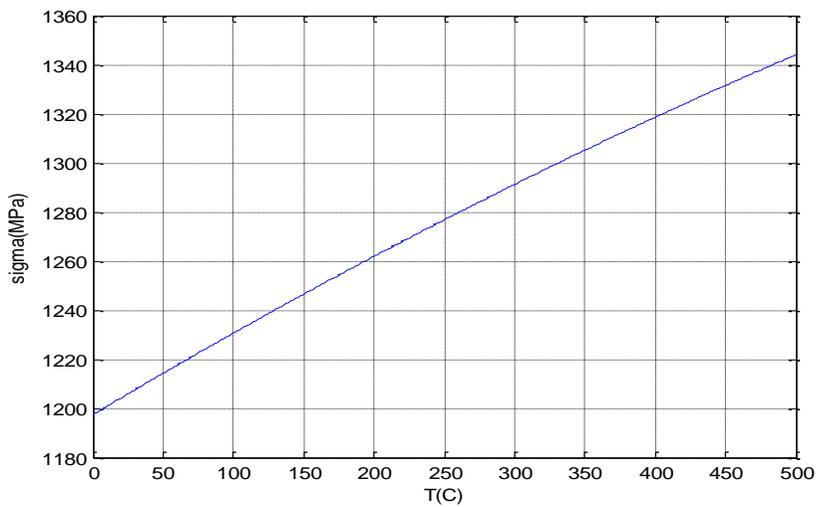


Figure 2 : *Contrainte thermique de rupture du carbone*

III-4. Contrainte thermique du composite carbone-époxyde

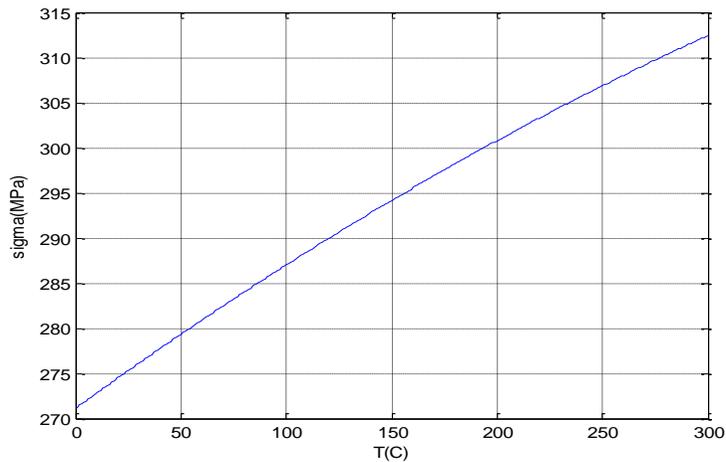


Figure 3 : Evolution de la contrainte thermique à rupture du composite carbone- époxyde

III-5. Contrainte à rupture du carbone-époxyde en fonction de la fraction volumique

Avec les caractéristiques obtenues par application de la loi des mélanges de Voigt, et, pour deux valeurs de température fixées on a la courbe suivante :

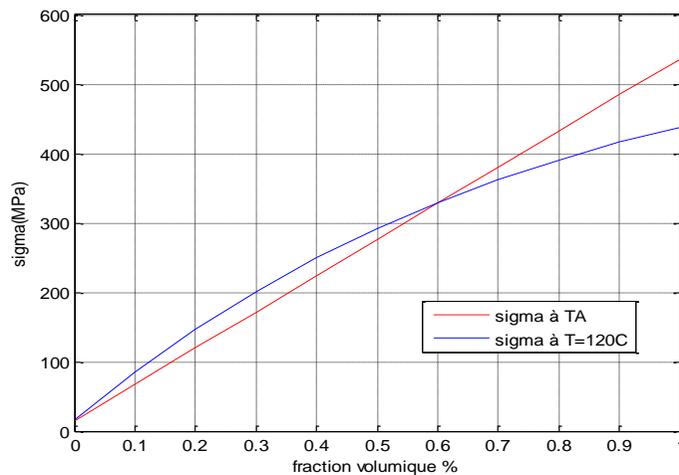


Figure 4 : Evolution de la contrainte à rupture en fonction de la fraction volumique

IV - DISCUSSION

Les résultats théoriques que nous obtenons avec le modèle proposé doivent être comparés à des résultats expérimentaux. Pour cela, nous allons comparer nos résultats à ceux de la référence [7] à deux valeurs de température : 37⁰ C et 120⁰ C.

Tableau 2 : Comparaisons des résultats

Matériau	Grandeur	Températures (°C)	Nos résultats	Résultats expérimentaux [7]	Erreur relative (%)
Carbone-époxy	$\sigma_{rup}(MPa)$	37	277.3	276	0.47
Carbone-époxy	$\sigma_{rup}(MPa)$	120	290	292	0.68

Nous remarquons que, la courbe donnant la contrainte de rupture du composite en fonction de la température obtenue avec notre modèle est croissante, linéaire jusqu'à la rupture. Nous pouvons donc conclure que le carbone-époxyde présente un comportement fragile car ne plastifie pas avant la rupture. La courbe de traction de l'époxyde nous montre pourtant un comportement plastique pour certaines températures. La fibre de carbone quant à elle ne plastifie pas. Comme l'époxyde est thermodurcissable, l'augmentation de la température la rend plus rigide ce qui explique la nature fragile du composite.

A la température ambiante, l'erreur relative est de 0.5%, cette erreur peut être négligée dans certaines applications. De même, à 120 °C l'erreur est sensiblement égale à 0.7%. Avec de tels résultats, nous pouvons conclure que le modèle proposé peut être valide dans des applications car, les résultats obtenus par celui-ci se rapprochent des résultats expérimentaux. Nous obtenons la valeur de la contrainte à rupture des matériaux composites à deux températures.

Ces résultats montrent que la contrainte à rupture augmente avec la fraction volumique. On remarque que les courbes tracées ont un point d'intersection ceci est dû au fait qu'il y'a une non linéarité qui apparaît à 120 °C pour des fractions volumiques supérieures à 60%. Le modèle que nous proposons est fonction d'une constante β elle-même fonction de la taille des défauts et de la fonction de distribution d'angle $f(\theta)$ et la longueur effective sur laquelle les défauts peuvent se propager.

Comme nous ne pouvons pas connaître la taille du défaut préexistant dans le matériau, il faut alors la fixer de telle sorte que l'on puisse calculer la contrainte à rupture à une température donnée. Ce paramètre β peut aussi nous permettre de calculer la taille du défaut critique qui causerait la ruine de la structure [8].

V - CONCLUSION

Dans cette étude, il était question d'établir un modèle théorique thermomécanique de la contrainte à rupture des matériaux composites. Nous avons commencé par établir un modèle thermomécanique du facteur d'intensité des contraintes critiques puis nous avons donc établi le modèle nous permettant de calculer la contrainte à rupture à différentes températures. Nous avons travaillé sur un composite carbone-époxyde stratifié troué et nous avons calculé la contrainte à rupture à deux températures. Les différents résultats obtenus en simulation nous conduisent aux résultats suivants : le facteur d'intensité des contraintes critiques augmente avec la température jusqu'à une certaine limite. L'augmentation du FIC critique avec la température entraîne celle de la contrainte à rupture. Le carbone-époxyde ne plastifie avant la rupture malgré l'augmentation de la température. Notre étude a été faite sur un stratifié carbone-époxyde troué ayant un comportement fragile. Avec ce matériau, notre modèle nous a donné d'assez bons résultats.

RÉFÉRENCES

- [1] - L.A. MICCIO, R. LIANO, W.H. SCHREINER, P.E. MONTEMARTINI, P.A. OYANGUREN, *Polymer*, 51, (2010), 6219-6226.
- [2] - R.P. LEMANLE SANGA, G.E. NTAMACK, K. MANSOURI, T. BEDA, S. CHARIF D'OUAZZANE, *J. Mater. Environ. Sci.* 4 (6) (2013) 1034-1041.
- [3] - M.A. SUTTON, X. DENG, F. MA, JR. J.C. NEWMAN, M. JAMES, *Inter J Struct Sol*, (37) (2000), 3591-3618.
- [4] - C. COLLARD, T. BENZINEB, E. PATOOR, O.M. BENSALAH, *Mater. Sci. Eng., A*, 481-482, (2008) 366-370.
- [5] - W. VOIGT, *Wied Ann Mech*, Vol 38, (1889) 573-587.
- [6] - D. MICHEL, *Aide-mémoire science des matériaux*, Dunod, Paris (2004) 89-130.
- [7] - J. AUCHER, B. VIEILLE, L. TALEB, *UMR 6634 CNRS*, (2011) 6.
- [8] - E. ERDOGAN, *Inter J Sol Struct*, 27, (2000) 171-183.